Лекция 1

Тема. Введение (множества, действительные числа).

План лекции:
1. Основные понятия теории множеств, операции над ними и логическая символика.
2. Бином Ньютона.
3. Метод математической индукции.
4. Абсолютная величина и её основные свойства.
5. Отображения.
6. Мощность множества.
7.Числовые множества. Точная верхняя (нижняя) грани числового множества (супремум и инфимум). Теорема о существовании верхней (нижней) грани ограниченного множества.

Предметом математического анализа является изучение функций с помощью предельного перехода.

§1. Основные понятия теории множеств, операции над ними и логическая символика.

1.1 **Понятие множества.**

Под ***множеством*** понимают любую совокупность объектов, называемых ***элементами множества***. Множество обозначается прописной буквой, а его элементы – строчными буквами. При заданном множестве A включение $a \in A$ указывает на то, что a - элемент множества A; в противном случае пишут $a \notin A$. Говорят, что A – ***подмножество*** множества B или $A \subset B$ (A содержится в B), когда каждый элемент множества A является элементом множества B.
Пустое множество $\varnothing$, совсем не содержащее элементов, есть подмножество всякого множества.
Примерами множеств являются: множество студентов данного вуза, множество предприятий некоторой отрасли, множество натуральных чисел и т.п.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два множества называются ***равными***: $A = B$, - если каждое из них является подмножеством другого. Иными словами множества равны, если у них одни и те же элементы. Символически: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$ ($\Leftrightarrow$ – «тогда и только тогда, когда»).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть A и B - произвольные множества; их ***суммой (объединением)*** $A \bigcup B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B, т.е. $x \in A \bigcup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$.

Отметим, в частности, следующее: если множество В есть подмножество множества А, то сумма множеств B и A совпадает с A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. ***Пересечением*** $A \bigcap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B; т.е. $x \in A \bigcap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$.

Это множество может оказаться и пустым. Заметим, что если $B \subset A$, то пересечение множеств A и B есть множество B.

Операции объединения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны и ассоциативны, т.е. $A \bigcup B = B \bigcup A$, $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$,
$A \bigcap B = B \bigcap A$, $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$. Кроме того, они взаимно дистрибутивны:
$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$, $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. ***Разностью*** $A \setminus B$ множеств A и B называется множество тех элементов из A, которые не содержатся в B, т.е. $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$

При этом, вообще говоря, не предполагается, что $B \subset A$. Если B – подмножество в A, то символ $A \setminus B$ (B') обозначает еще дополнение к B в A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. ***Симметрической разностью*** $A\Delta B$ множеств A и B называется множество, являющееся объединением множеств $A\setminus B$ и $B\setminus A$:

$$A\Delta B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A),\quad \text{т.е. } x\in A\Delta B\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in A\setminus B\\ x\in B\setminus A\end{array}\right.$$

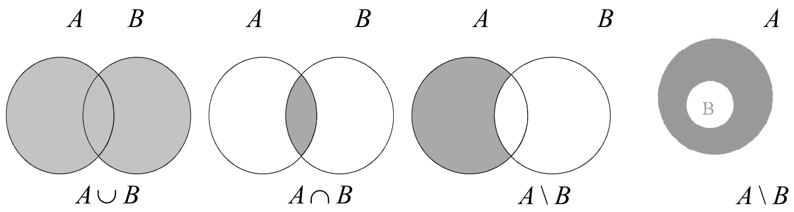


Рис. 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.

Декартовым произведением **множеств A и B называют множество $A\times B$ всех упорядоченных пар элементов (a, b), где $a\in A$, $b\in B$. Элементы a и b называют при этом *компонентами* (*координатами*) пары (a, b).**

Декартово произведение $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ множеств A_1, A_2, ..., A_n представляет собой множество всех упорядоченных n-ок (энок) элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1\in A_1$, ..., $a_n\in A_n$. В частности, декартово произведение $R\times R\times\ldots\times R$, где R — множество действительных чисел, определяет n-мерное арифметическое пространство R_n.

<u>**Пример 1.**</u> Доказать равенство $(A\setminus B)'=A'\bigcup B$.

$$\blacktriangleright\ \forall x\in(A\setminus B)'\Leftrightarrow\begin{cases}x\in S\\ x\notin A\setminus B\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}x\in S\\ \left[\begin{array}{l}x\notin A\\ x\in B\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in S\\ x\notin A\end{cases}\\ \begin{cases}x\in S\\ x\in B\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in A'\\ x\in B\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in A'\bigcup B\Leftrightarrow(A\setminus B)'\underset{\supseteq}{\subseteq}A'\bigcup B\Leftrightarrow(A\setminus B)'=A'\bigcup B\ \blacktriangleleft$$

1.2. Некоторые числовые множества.

Вещественное (действительное) число можно изображать точками на координатной прямой. Поэтому множество всех вещественных чисел называют числовой прямой, а сами числа – точками, и при рассмотрении числовых множеств часто пользуются их геометрической интерпретацией. Будем использовать следующие обозначения и терминологию

Множество натуральных чисел

$$\mathbf{N}=\{n\}=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}.$$

Множество целых чисел

$$\mathbf{Z}=\{n\}\bigcup\{0\}\bigcup\{-n\}=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots,\ \pm n,\ \ldots\}.$$

Множество рациональных чисел

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\right\},\ \text{где } p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{Z},\ q\neq0.$$

I - множество иррациональных чисел;

$\mathbf{R}=(-\infty,\ +\infty)$ - множество всех вещественных чисел (числовая прямая);

Очевидно, что $N\subset Z\subset Q\subset R$, $I\subset R$ и $R=Q\bigcup I$.

Все указанные числовые множества обладают свойством упорядоченности, т. е. для любых двух различных элементов a и b любого из данных множеств можно сказать, что либо $a>b$, либо $a<b$. Кроме того, выполняется свойство транзитивности: из $a>b$ и $b>c$ следует, что $a>c$.

$[a,b]$- сегмент (отрезок) – множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$;

(a,b) - интервал- множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$;

$[a,b)$ или $(a,b]$- полуинтервал (полусегмент)- множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \le x < b, \quad a < x \le b$;

$[a, +\infty)$ или $(a, +\infty)$; $(-\infty, a]$ или $(-\infty, a)$ - полупрямая – множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \le x < +\infty, \quad a < x < +\infty,$; $-\infty < x \le a, \; -\infty < x < a$;

сегмент, интервал, полуинтервал, полупрямую и числовую прямую будем называть также промежутком;

окрестность точки c – любой интервал, содержащий точку c;

ε ***- окрестность точки*** c – интервал $(c-\varepsilon, \; c+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

1.3. Об использовании некоторых логических символов.

Для краткости записи формулировок определений и теорем используются логические символы или кванторы.

1. Символ "$\forall$" называется квантором всеобщности и означает «для любого» или «для каждого».
2. Символ "$\exists$" - квантором существования и означает «существует».
3. Символ "$\Leftrightarrow$" - символом эквивалентности и означает «тогда и только тогда, когда».
4. Символ "$\Rightarrow$" - символом импликации. Запись "$\alpha \Rightarrow \beta$" означает, что «из α следует β».
5. Символ "$|$" означает «что».
6. Символ "$:$" означает «такой, что».

§2. Бином Ньютона.

При любых действительных a и b и любом натуральном n справедливы равенства

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n;$$

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^k \, C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n \, b^n.$$

Здесь $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ число сочетаний из n элементов по m.

Например,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

§3. Метод математической индукции.

Пусть запись $A(k)$ означает, что высказывание A истинио при указанном $k \in \mathbb{N}$. Суть метода математической индукции в следующем:

$$(A(1) \wedge (A(k) \Rightarrow A(k+1) \;\; \forall k \in \mathbb{N})) \Rightarrow (A(n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}).$$

Иными словами, для того, чтобы доказать, что некоторая теорема верна для всякого натурального числа n, достаточно доказать: 1) что эта теорема справедлива для $n = 1$ и 2) что если эта теорема справедлива для какого-нибудь натурального числа n, то она справедлива также и для следующего натурального числа $n + 1$.

Пример 2. Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливо равенство: $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение.

1) Проверим, что формула верна при n =1: $1^2=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}\Leftrightarrow 1=1$ – верно!

2) Допустим, что для некоторого $n\in \mathrm{N}$ формула верна: $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) Докажем, что тогда формула верна и для следующего натурального числа $n+1$:

$$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

► $1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=$ используем предположение пункта 2):

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}[n(2n+1)+6(n+1)]=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$$ ◄

Пример 3. Применяя метод математической индукции, доказать, что $\forall n\in N$ справедливо равенство: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Решение.

1) $n=1$, $1=1$. 2) $n=k$, $1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$. 3) $n=k+1$, $1+2+3+...(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

►

$$1+2+3+...+(k+1)=1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$ ◄

§4. Абсолютная величина действительного числа и её основные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Для любого действительного числа x число, обозначаемое $|x|$ и определяемое по формуле: $|x|=\begin{cases}-x, & \text{если } x\prec 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ x, & \text{если } x\succ 0.\end{cases}$ называется абсолютной величиной действительного числа x.

Свойства абсолютных величин:

1) $|x|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a$, 2) $-|x|\le x\le |x|$,

3) $|x+y|\le |x|+|y|$, 4) $|x-y|\ge |x|-|y|$,

5) $|xy|=|x|\cdot|y|$, 6) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$.

§5. Отображения.

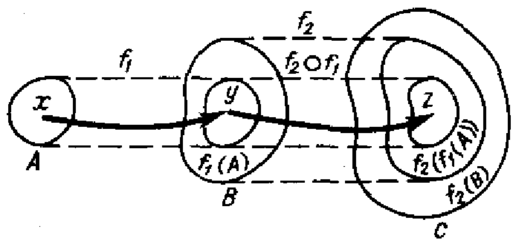
Отображение — одно из основных понятий математики. Пусть A и B — два непустых множества. Если каждому элементу $x\in A$ ставится в соответствие по правилу f один вполне определенный элемент $y\in B$, то говорят, что задано *отображение* множества A в множество B. Обозначение: $f\colon A\to B$. При этом $y=f(x)$ называют *образом элемента* x, а x — *прообразом элемента* y.

Множество всех $y\in B$, в которые переходят различные $x\in A$, называют *множеством значений отображения* f и обозначают $f(A)$. Очевидно, $f(A)\subseteq B$.

Если при отображении f каждый элемент $y\in B$ соответствует некоторому элементу $x\in A$, то говорят об отображении множества A на множество B.

Отображение f называют *обратимым*, если из условия $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in A$) вытекает $y_1 \neq y_2$ ($y_1, y_2 \in B$), т. е. разным прообразам соответствуют разные образы. В этом случае каждый образ y имеет единственный прообраз x и можно определить отображение f^{-1}: $f(A) \to A$, называемое *обратным* к отображению f. Обратное отображение устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между множествами A и $f(A)$, т. е. такое соответствие, при котором каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества $f(A)$ и каждому элементу множества $f(A)$ соответствует единственный элемент множества A.

Если заданы отображения f_1: $A \to B$ и f_2: $B \to C$, то отображение $f_2 \circ f_1$, *сопоставляющее каждому элементу* $x \in A$ *определенный элемент* $z \in C$ такой, что $z = f_2(y)$, где $y = f_1(x)$, называют суперпозицией отображений f_1, f_2.



Отображение f называют функционалом, если множество B является множеством действительных чисел. Если же и множество A – числовое, то отображение f называют функцией.

$f(A) = \{y \in R \mid y = f(x),\ x \in A\}$ принято обозначать $E(f)$ и называть областью значений функции.

§6. Мощность множества.

Множества называют ***эквивалентными*** или ***равномощными***, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Множество A является бесконечным, если оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству; в противном случае множество A — конечное.

Мощность конечного множества совпадает с количеством его элементов.

Всякое бесконечное множество, эквивалентное множеству N натуральных чисел, называется *счетным.*

Из любого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество. Всякое бесконечное подмножество счетного множества является счетным множеством.

Объединение конечного или счетного множества счетных множеств есть счетное множество. Декартово произведение конечного множества счетных множеств есть счетное множество.

Множества Z (целых чисел) и Q (рациональных чисел) есть счетные множества.

Множество R действительных чисел несчетно.

Всякое бесконечное множество, эквивалентное множеству действительных чисел, называют *множеством мощности континуума*.

§7. Числовые множества. Точная верхняя (нижняя) грани числового множества (супремум и инфимум). Теорема о существовании верхней (нижней) грани ограниченного множества.

Множества **Q** и **R** являются всюду плотными множествами. Это означает, что между любыми двумя различными элементами a и b любого из указанных множеств найдется хотя бы один элемент этого же множества. Таким элементом является, например, элемент $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Пусть $A=\{x\}$ — некоторое непустое множество действительных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.

Множество A называют *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует действительное число K такое, что для всех $x \in A$ выполняется неравенство $x \leqslant K$ ($x \geqslant K$).

Всякое число K с указанным свойством называют *верхней* (*нижней*) гранью множества A.

Число K также называют мажорантой (минорантой) множества A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Множество называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.

Наименьшую из верхних граней множества A называют *точной верхней гранью* этого множества и обозначают символом $\sup A$ (супремум A).

Наибольшую из нижних граней множества A называют *точной нижней гранью* этого множества и обозначают символом $\inf A$ (инфимум A).

Замечание. Грани $\sup A$, $\inf A$ не обязаны принадлежать множеству A. Например, если $A=\{\alpha \mid \alpha>0\}$, то $\inf A=0 \notin A$.

Свойства точной верхней и точной нижней граней.

1^0. Для любого элемента $x \in \mathbf{A}$ выполняется неравенство $x \leqslant \sup \mathbf{A}$ ($x \geqslant \inf \mathbf{A}$).

2^0. Для любого числа $\varepsilon>0$ найдется элемент $x \in \mathbf{A}$ такой, что $x>\sup A-\varepsilon$ ($x<\inf \mathbf{A}+\varepsilon$).

Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Теорема. Для любого непустого ограниченного множества $A \subset R$ существуют единственные $\sup A$, $\inf A$.

<u>Пример 4.</u> Найти $\sup A$, $\inf A$, если $A=\left\{\dfrac{2n-1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

Представим общий член a_n этого множества в виде: $a_n=\dfrac{2n-1}{n+1}=\dfrac{2n+2-3}{n+1}=2-\dfrac{3}{n+1} \underset{n\to\infty}{\uparrow} 2$.

Теперь покажем, что $\sup A=2$, $\inf A=\dfrac{1}{2}=a_1$.

$\sup A=2$.

► 1)Покажем, что 2 – верхняя граница множества A, т.е. $a_n=\dfrac{2n-1}{n+1} \leq 2 \quad \forall n \in \mathrm{N}$.

В самом деле, $\dfrac{2n-1}{n+1} \leq 2 \;\Rightarrow\; 2n-1 \leq 2n+2 \;\Rightarrow\; -1 \leq 2$ - верно.

2) Покажем, что 2 - наименьшая из верхних границ, т.е. $\forall d<2 \quad \exists a_{n_d} \in A: \quad a_{n_d}>d$:

$$a_n=\frac{2n-1}{n+1}>d \;\Rightarrow 2n-1>nd+d \;\Rightarrow n(2-d)>d+1 \Rightarrow n>\frac{d+1}{2-d}, \text{ т.к. } 2-d>0;$$

$\Rightarrow$ например, $n_d=\left[\dfrac{d+1}{2-d}\right]+1$. ◄

$\inf A = \frac{1}{2}$.

►1). Покажем, что $\frac{1}{2}$ - нижняя граница множества A, т.е. $a_n = \frac{2n-1}{n+1} \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathrm{N}$.

В самом деле, $\frac{2n-1}{n+1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 4n-2 \geq n+1 \Rightarrow 3n \geq 3 \Rightarrow n \geq 1$ - верно.

2)Покажем, что $\frac{1}{2}$ - наибольшая из нижних границ, т.е. $\forall d > \frac{1}{2} \quad \exists a_{n_d} \in A: \ a_{n_d} < d$:

Очевидно, что в качестве номера n_d можно взять 1, т.к. $a_1 = \frac{1}{2} < d$.◄